PART4 三角形の決定

要点① 三角形の辺と角の関係

△ABC において

A が鋭角 $\iff$ $\cos A$

A が直角 $\iff$ $\cos A$

A が鈍角 $\iff$ $\cos A$

である。また，余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

であり，$2bc>0$ であるから，$\cos A$ の符号と $b^2+c^2-a^2$ の符号は一致する。よって，

$$\cos A>0 \iff b^2+c^2-a^2>0 \iff b^2+c^2>a^2$$

$$\cos A=0 \iff b^2+c^2-a^2=0 \iff b^2+c^2=a^2$$

$$\cos A<0 \iff b^2+c^2-a^2<0 \iff b^2+c^2<a^2$$

であるから，次のことがいえる。

> △ABC において
>
> A が鋭角 $\iff$ $b^2+c^2>a^2$
>
> A が直角 $\iff$ $b^2+c^2=a^2$
>
> A が鈍角 $\iff$ $b^2+c^2<a^2$

例 △ABC において, $a=7$, $b=4$, $c=5$ のとき, A は鋭角, 直角, 鈍角のいずれであるか求める。

$4^2+5^2=41$，$7^2=49$ より 4^2+5^2 　 7^2 　つまり b^2+c^2 　 a^2

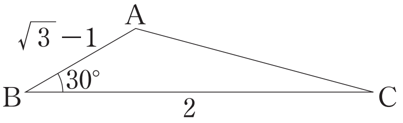
よって，A は 　　 である。

要点② 三角形の決定

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさが与えられたとき，残りの辺の長さや角の大きさを，正弦定理や余弦定理を用いて求めることができる。

例 △ABC において，$a=2$，$c=\sqrt{3}-1$，$B=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求める。

余弦定理より



$b^2=$

$=4-2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=2$

$b>0$ より $b=\sqrt{2}$

余弦定理より

$$\cos A=\qquad=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{\qquad}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$A=$

したがって　$C=\qquad=15°$

※$b=\sqrt{2}$ を求めたあとに，正弦定理を用いると

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}=\frac{2}{\sin A}$$

$$\sin A=2\times\frac{\sin 30°}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

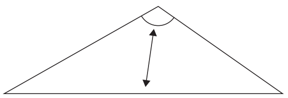
よって $A=$　　　　であり

$A=$　　のとき　$C=180°-(45°+30°)=105°$

$A=$　　のとき　$C=180°-(135°+30°)=15°$

である。

ここで，三角形について



最大の辺の対角が最大の角

が成り立つことを用いると，$c<b<a$ より，

a が最大の辺であることから，A が最大の角である。

したがって，$A=45°$ は適さず，$A=135°$ は適する。

ゆえに $A=135°$，$C=15°$

4 (1) △ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

(2) △ABC において，$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

Point Pickup

三角形の辺と角の関係

△ABC において

A が鋭角 $\iff$ $b^2+c^2>a^2$

A が直角 $\iff$ $b^2+c^2=a^2$

A が鈍角 $\iff$ $b^2+c^2<a^2$

三角形の決定

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを，正弦定理や余弦定理を用いて求めることができる。

・ある辺とその対角がわかる $\Longrightarrow$ 正弦定理の利用

・2 辺とその間の角がわかる，3 辺がわかる $\Longrightarrow$ 余弦定理の利用

を考えるとよい。

第13講 PART4 確認問題

1 △ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，A は

ア である。

ア は，次の①～③のうちから選べ。

① 鋭角　② 直角　③ 鈍角

2 △ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=60^\circ$ のとき，

残りの辺の長さと角の大きさを求めると，

$$a=\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ B=\boxed{\text{ウエ}}^\circ,\ C=\boxed{\text{オカ}}^\circ$$

である。

PART4 三角形の決定

4 (1) △ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

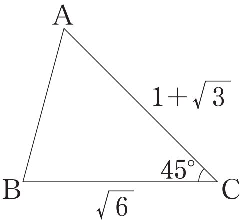
(2) △ABC において，$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

[解答]

(1) $6^2+5^2=61$，$7^2=49$ より $6^2+5^2>7^2$　つまり $b^2+c^2>a^2$

よって，余弦定理より，A は鋭角である。

(2) 余弦定理より



$$c^2=(\sqrt{6})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$

$$=6+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})=4$$

$c>0$ より $c=2$

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60^\circ$

したがって　$B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

第13講　PART4 確認問題 解答

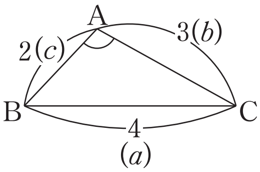
1

[正解] ア：③

[解説]

$$b^2+c^2=3^2+2^2=13$$

$$a^2=4^2=16$$



であるから，$b^2+c^2<a^2$

よって，A は**鈍角**である。[A]

[A]　三角形の辺と角の関係
△ABC において，
A が鋭角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2>a^2$
A が直角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2=a^2$
A が鈍角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2<a^2$

2

[正解] イ：6，ウエ：45，オカ：75

[解説]

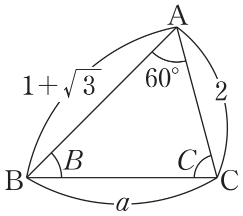
余弦定理より，

$$a^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ$$ [B]

$$=4+(4+2\sqrt{3})-2(1+\sqrt{3})$$

$$=6$$

$a>0$ より，$\boldsymbol{a=\sqrt{6}}$



余弦定理より，

$$\cos B=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}}$$ [C]

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})+6-4}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+6}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$

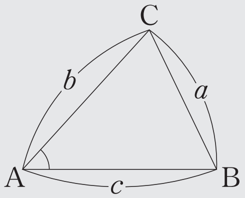
$$=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\boldsymbol{B=45^\circ}$

したがって，$C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=\boldsymbol{75^\circ}$

[B]　余弦定理
△ABC において，
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



[C]　余弦定理
△ABC において，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$\Longleftrightarrow \quad \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$